Задания

для проведения школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 5 – 11 классах в Магдагачинском районе

2020г.

Каждая задача оценивается в 7 баллов в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Критерии оценивания работ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

На решение заданий школьного этапа олимпиады по математике отводится

90 минут для 5-6 классов, 135 минут для 7-8 классов и 180 минут для 9-11 классов.

Задачи Всероссийской олимпиады школьников по математике

Школьный этап

5 класс

1. Вычеркните в числе 3000627 пять цифр так, чтобы оставшееся число стало наибольшим.

2. На листе бумаги нарисованы квадрат и прямоугольник. Квадрат имеет площадь 25 кв.см. Одна из сторон прямоугольника на 1 см больше стороны квадрата, а другая сторона на 2 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь этого прямоугольника.

3. Три подруги вышли погулять, одна из них была в белом, другая в зелёном, а третья в синем платье. Их туфли из тех же трёх цветов. Известно, что у Ани цвет платья и цвет туфель совпадают. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми, Наташа была в зелёных туфлях. Определить цвет платья и цвет туфель каждой девочки.

4. Найдите сумму: 1+2+3+…+111.

5. На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30, а затем он сосчитал количество ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на школьном дворе?

Ключи школьной олимпиады по математике

5 класс

1. Ответ. 67.

2. Ответ. 18 кв.см.

Решение.

Сторона квадрата 5 см, тогда одна сторона прямоугольника 6 см, а другая – 3см. Площадь прямоугольника $6 \cdot 3 = 18$ (кв. см).

3. Ответ. У Ани белое платье и белые туфли, у Вали зелёное платье и синие туфли, у Наташи синее платье зелёные туфли.

Решение.

Так как у Наташи туфли зелёные, а у Вали не белые, а значит и не зелёные, то у Вали туфли синие, поэтому у Ани туфли белые, но у неё и платье того же цвета, то есть белое. У Наташи туфли зелёные, а платье другого цвета и не белое, значит, у Наташи платье синее, поэтому у Вали платье зелёное.

4. Ответ. 6216.

Решение.

1+2+3+…+111 = (1+111) + (2+100) + (3+99) +…+ 56 = 112 · 55 + 56 = 6216.

5. Ответ. 12 поросят и 18 гусей.

Решение.

1 шаг. Представьте, что все поросята подняли по две ноги вверх.

2 шаг. На земле осталось стоять 30 · 2 = 60 ног.

3 шаг. Подняли вверх 84 - 60 = 24 ноги.

4 шаг. Подняли 24 : 2 = 12 поросят.

5 шаг. 30 - 12 = 18 гусей.

Задачи Всероссийской олимпиады школьников по математике

Школьный этап

6 класс

1. Расставьте скобки в выражении 7 – 6 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1 = 0 так, чтобы получилось верное равенство.

2. У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишнёвого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть всё варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

3. В ящике лежат шары: 5 красных, 7 синих и 1 зелёный. Сколько шаров надо вынуть, чтобы достать два шара одного цвета?

4. Мальчик по чётным числам всегда говорит правду, а по нечётным всегда врёт. Как-то его три ноябрьских дня подряд спрашивали «Как тебя зовут?» На первый день он ответил: «Андрей», на второй: «Матвей», а на третий: «Виктор». Как зовут мальчика? Объясните, как вы рассуждали.

5. На окраску куба размерами 2 х 2 х 2 требуется 2 грамма краски. Сколько краски потребуется на покраску куба размерами 6 х 6 х 6?

Ключи школьной олимпиады по математике

6 класс

1. Ответ: 7 – (6 – 5) – 4 – (3 –2) – 1.

2. Ответ: не может.
Решение. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то банкой из 5 + 8 + 10 = 23 банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и всё варенье съесть не сможет.

3. Ответ: 4 шара.
Решение. Из ящика можно достать, не повторяясь, шаров различных цветов 3 штуки. Поэтому, чтобы достать два шара одного цвета надо вынуть 4 шара.

4. Ответ. Матвей.
Решение. Так как мальчик дал три разных ответа, то он хотя бы два раза соврал. Поэтому два дня из трёх, когда мальчику задавали вопросы, пришлись на нечётные числа. Поскольку чётные и нечётные числа месяца чередуются, это должны были быть первый и третий дни. Стало быть, второй день пришёлся на чётное число. В этот день мальчик и назвал своё имя.

5. Ответ. 18 г

Решение. Площадь одной грани первого куба 2 х 2. Так как у куба шесть граней, то площадь всех граней первого куба 2 х 2 х 6=24. Площадь всех граней второго куба 6 х 6 х 6 = 216. Площадь граней второго куба больше

площади граней первого куба в 216 : 24 = 9 раз.
Значит, на куб 6 х 6 х 6 потребуется краски в 9 раз больше, то есть 2 х 9=18 г.

Задачи Всероссийской олимпиады школьников по математике

Школьный этап

7 класс

1. Сколько существует двузначных чисел, в записи которых не употребляется цифра 1?

2. Петя сказал, что у него братьев и сестёр поровну, а Маша сказала, что у неё братьев в три раза больше, чем сестёр. Сколько детей в семье, если Маша и Петя – брат и сестра?

3. На каждой перемене Робин-Бобин-Барабек съедает по конфете. За неделю (с понедельника по субботу) было 30 уроков. Сколько всего конфет съел Робин на переменах?

4. Сколько прямоугольных пластин размером 20×45 см можно вырезать из фанерного листа размером 120×240 см? (Ответ обосновать).

5. Улитка взбирается на ветку длиной 10дм. За день она поднимается на 4 дм, а за ночь сползает вниз на 3 дм. Через сколько дней улитка достигнет конца ветки?

Ключи школьной олимпиады по математике

7 класс

1. Ответ: 72.

Решение. Всего двузначных чисел: 99 ─ 9 = 90. Двузначные числа, в записи которых употребляется цифра 1: 10, 11, 12, …, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71,81,91.

90 – 18 = 72.

2. Ответ. 5 детей (3 брата и 2 сестры).

Решение. Пусть сестёр в семье x. Тогда из ответа Пети следует, что братьев в семье x+1. Теперь из ответа Маши получаем уравнение x+1=3(x–1), откуда x=2.

3. Ответ. 24 конфеты.

Решение. Если бы все эти уроки произошли в один день, то Робин съел бы 29 конфет (количество промежутков между 30 уроками). Но так как между последним уроком какого-то дня и первым уроком следующего дня конфета не съедается, то нужно ещё вычесть 5 конфет (по количеству промежутков между шестью днями), т.е. итого получается, что Робин съел 30 – 5=24 конфеты

4. Ответ: 32 пластины.
Решение:

1) $120 \cdot 240 = 28800$(см²) – площадь фанерного листа
2) $20 \cdot 45 = 900$(см²) – площадь пластины
3) $28800:900 = 32$.

5. Ответ: 7 дней.

Решение. В 1-й день улитка поднимется до 4 дм, ночью спустится до 1 дм. Во 2-й день поднимется до 5 дм, ночью спустится до 2 дм. В 3-й день поднимется до 6 дм, ночью спустится до 3 дм. В 4-й день поднимется до 7 дм, ночью спустится до 4 дм. В 5-й день поднимется до 8 дм, ночью спустится до 5 дм. В 6-й день поднимется до 9 дм, ночью спустится до 6 дм. Во 7-й день поднимется до 10 дм. (Может быть и графическое решение)

Задачи Всероссийской олимпиады школьников по математике

Школьный этап

8 класс

1. Из 38 учащихся 28 посещают хор и 17 лыжную секцию. Сколько лыжников посещает хор, если в классе нет учащихся, которые не посещают хор или лыжную секцию?

2. Найдутся ли натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению:
$28x + 30y + 31z = 365$?

3. Сторона AC треугольника ABC точками D и E разделена на три равные части (точка D лежит между A и E). Докажите, что если BD=BE, то треугольник ABC – равнобедренный.

4. Четырёх кошек взвесили попарно во всех возможных комбинациях. Получились массы 7 кг, 8 кг, 9 кг, 10 кг, 11 кг, 12 кг. Какова общая масса всех кошек?

5. Вдоль забора растут 10 кустов смородины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 1000 ягод?

Ключи школьной олимпиады по математике

8 класс

1. Ответ: 7 человек. Хор не посещают 10 человек, все они лыжники.

2. Ответ. Да найдутся.

Решение: Например, x = 1 (февраль), y = 4 (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь) z = 7 (все остальные месяцы в году). Ещё решение: x = 2, y = 1, z = 9.

3. Решение. Так как треугольник BDE равнобедренный, то ∠BDE=∠BED. Значит, равны соответствующие смежные углы: ∠ADB=∠CEB. По условию, AD=EC и BD=BE. Поэтому треугольники ADB и CEB равны (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует равенство сторон AB и BC. Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный.

4. Ответ:12 кг.

Решение. Пусть масса кошек a, b, c, d соответственно, тогда, a + b = 7, a + c = 8,

a + d = 9, b + c = 10, b + d = 11, c + d = 12. Сложив эти равенства, получим:

3a + 3b + 3c + 3d = 57, откуда масса четырёх кошек равна: a + b + c + d = 57 : 3 = 19 (кг).

5. Ответ. Не может.
Решение. Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечётное число ягод. Тогда количество ягод на десяти

кустах равно сумме пяти нечётных чисел, т.е. числу нечётному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 1000 ягод.

Задачи Всероссийской олимпиады школьников по математике

Школьный этап

9 класс

1. Автомобиль проехал 600 км. Первую половину пути он двигался со скоростью 100 км/ч, а вторую – 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля.

2. На доске написано число 543254325432. Некоторые цифры стёрли так, чтобы получить наибольшее возможное число, делящееся на 9. Чему равно это наибольшее число?

3. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle ADC=120°$, $\angle DAB=60°$.

4. Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семёрку, восьмёрку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

5. Четверо ребят – Алексей, Борис, Владимир и Григорий участвовали в лыжных гонках. На следующий день, на вопрос кто какое место занял, они ответили так:
Алексей: Я не был ни первым и ни последним;
Борис: Я не был последним;
Владимир: Я был первым;
Григорий: Я был последним.
Известно, что три из этих ответов были правдивыми, а один – ложью. Кто сказал правду? Кто был первым?

Ключи школьной олимпиады по математике

9 класс

1. Ответ: 75 км/ч.
Решение.
600 : 2 = 300 (км) – половина пути;
300 : 100 = 3 (ч) – время, затраченное на первую половину пути;

300 : 60 = 5 (ч) – время, затраченное на вторую половину пути;
3 + 5 = 8 (ч) – время движения автомобиля;
600 : 8 = 75 (км/ч) - средняя скорость движения автомобиля.

2. Ответ. 5435432532.
Решение. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стёртых цифр должна быть равна 6. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр. Поэтому нужно стереть две цифры – либо 3 и 3, либо 2 и 4. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят большие цифры. Поэтому нужно стереть первую двойку и последнюю четвёрку.

3. Ответ. $\angle A=90°$, $\angle B=60°$, $\angle C=30°$.
Решение. Так как $\angle ADC=120°$, то $\angle ADB=60°$. Значит, треугольник ADB равносторонний (и $\angle ABD=60°$). Тогда BD = AD = DC и треугольник ADC равнобедренный. Значит $\angle DAC= \angle DCA=(180°–120°):2=30°$. Откуда $\angle BAC = 90°$.

4. Ответ. В семёрку – 1 попадание, в восьмерку – 2 попадания, в девятку – 3 попадания.
Решение. Так как стрелок попадал лишь в семёрку, восьмёрку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (так как по крайней мере по одному разу в семёрку, восьмёрку и девятку стрелок попал) он наберёт 7 + 8 + 9 = 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков. Что возможно при единственной комбинации 8 + 9 + 9 = 26. Итак, в семёрку стрелок попал 1 раз, в восьмёрку – 2 раза, в девятку – 3 раза.

5. Ответ: правду сказали Алексей, Борис, Григорий. Первым был Борис.
Решение:
Предположим, что солгал Алексей, тогда получается, что он был первым или последним. Значит, солгали ещё Владимир или Григорий. А это противоречит тому, что солгал всего один из ребят.
Пусть солгал Борис. Тогда он был последним. Но Григорий также утверждал, что он был последним. Значит, данного случая также не может быть.
Пусть солгал Владимир. Тогда он был не первым. В этом случае всё получается и первым тогда будет Борис.
Последний случай, когда солгал Григорий. Быть не может, так как тогда последним никто из ребят не был.

Задачи Всероссийской олимпиады школьников по математике

Школьный этап

10 класс

1. Найдите сумму: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 2^2 - 1^2$.

2. Известно, что $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Какие значения может принимать выражение $a(a_2 — b_2) + b(b_2 — c_2) + c(c_2 — a_2)$?

3. По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд, когда же они едут в одном направлении, то один настигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

4. Известно, что в ΔABC $\angle A = 2\angle C$, сторона ВС на 2см больше стороны АВ, а АС = 5см. Найти АВ и ВС.

5. Имеется 19 гирек весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 19 г. Девять из них – железные, девять – бронзовые и одна – золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.

Ключи школьной олимпиады по математике

10 класс

1. Ответ: 5050.

Решение.

По формуле разности квадратов $100^2 - 99^2 = 100 + 99$; $98^2 - 97^2 = 98 + 97$; …

Поэтому $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 2^2 - 1^2 = 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + 95 + .. + 2 + 1 = \frac{100+1}{2} \cdot 100 = 5050$.

2. Ответ: 0.

Решение. Заметим, что равенство $a^2 + b = b^2 + c$ можно записать в виде: $a^2 — b^2 = c — b$. Аналогично имеем $b^2 — c^2 = a — c$, $c^2 — a^2 = b — a$. Подставляя эти равенства в искомые выражения, получаем, что

$$a(a^2 — b^2) + b(b^2 — c^2) + c(c^2 — a^2) = a(c — b) + b(a — c) + c(b — a) =$$

$$ac - ab + ab - bc + bc - ac = 0 .$$

3. Ответ. 9 м/с и 8 м/с.

Решение. Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с (x > y). Тогда 10(x + y) = 170 и 170(x – y) = 170. Отсюда находим, x = 9 м/с, y = 8 м/с.

4. Ответ. AB = 4 см, BC = 6 см.
Решение. Проведём биссектрису AD. Введём обозначения: $\angle BAD = \angle 1$, $\angle DAC = \angle 2$, $\angle ACB = \angle 3$. Тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. В ΔADC $AD = DC$. Пусть AB = x, $AD = DC$ = y, тогда $BC = x + 2$, $BD = x + 2 – y$. Заметим, что $\Delta ABD \sim \Delta CBA$ по двум углам ($\angle B$ – общий, $\angle 1 = \angle 3$).
Из подобия имеем: $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$, или $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}$.
Для нахождения x и y получим систему уравнений: $\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5}, \\ \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5} \end{cases}$. Решая её, получим: $\begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy \end{cases}$, откуда $5y – 10 = 2y$, $y = \frac{10}{3}$, $x = 4$.
Значит, AB = 4 см, BC = 6 см.
5. Ответ: 10 г. Бронзовые гирьки весят не меньше, чем 1 + 2 + ... + 9 = 45 г, а железные - не больше, чем 11 + 12 + ... + 19 = 135 г. Если бы хотя бы одно из этих неравенств было строгим, то вес железных гирек превышал бы вес бронзовых гирек более, чем на 90 г. Значит, бронзовые гирьки весят 45 г, а железные - 135 г, а это возможно только если девять самых легких гирек - бронзовые, а девять самых тяжелых - железные. Поэтому золотая гирька весит 10 г.

Задачи Всероссийской олимпиады школьников по математике

Школьный этап

11 класс

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 5. \end{cases}$

2.Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

3. В мешке лежат 26 синих и красных шаров. Среди любых 18 шаров есть хотя бы один синий, а среди любых 10 шаров есть хотя бы один красный. Сколько красных шаров в мешке.

4. Отрезки AM и BH - соответственно медиана и высота треугольника ABC. Известно, что $AH = 1$ и $2\angle MAC = \angle MCA$. Найти длину стороны ВС.

5. Лист бумаги разрезали на 5 частей, некоторые из этих частей разрезали на 5 частей, и т. д. Может ли за некоторое число разрезаний получиться 2006 листка бумаги?

Ключи школьной олимпиады по математике

11 класс

1. Ответ: $x = \frac{2}{7}$; $y = \frac{2}{5}$; $z = \frac{2}{3}$.

Решение.

Введём новые обозначения: $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$, $\frac{1}{z} = t$

Получим: $\begin{cases} u + v = 6, \\ v + t = 4, \\ t + u = 5. \end{cases}$

Складывая уравнения системы, получим $2(u + v + t) = 15$;

Теперь нетрудно получить $u = 3{,}5$; $v = 2{,}5$; $t = 1{,}5$,

тогда $x = \frac{2}{7}$; $y = \frac{2}{5}$; $z = \frac{2}{3}$.

2. Ответ.105.

Решение. Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти наименьших из них не меньше, чем 1 + 2 + ….. + 9 = 45. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем 105. Это возможно: (1 + 2 + … + 105) : 10 = 15.

3. Ответ.17.

Решение. Так как из 18 шаров найдётся хотя бы один синий, то красных не более 17, а из любых 10 шаров найдётся хотя бы один красный, то есть синих не более 9. Так как всех шаров 26, то синих – 9, красных – 17.

4. Ответ. 2 см.

Решение. Проведём отрезок MH, он будет медианой прямоугольного треугольника BHC, проведённой к гипотенузе BC и равен её половине. Тогда ΔMHC – равнобедренный, поэтому $\angle MHC = \angle MCH = 2\angle MAC$, значит, $\angle HMA = \angle HAM$, поэтому, $AH = HM = MC = 1$ и $BC = 2MC = 2$ см.

5. Ответ: не может.

Решение. Замечаем, что при каждом разрезании из одного листка получаем, пять листков, т. е. число листков увеличивается на 4. Следовательно, из исходного листа может получиться число листков вида $1 + 4n$, где n € N,
т. е. это число при делении на 4 дает остаток 1. Но $2006 = 4 \cdot 501 + 2$.
Следовательно, 2006 листков получиться не может.